Uma extensão da representação de Munn e o grau de separação dos idempotentes de um block-group

Vítor Hugo Fernandes[a]

[a]Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2829-516 Monte da Caparica, Portugal; e-mail: vhf@fct.unl.pt

Resumo

É bem conhecido que todo o semigrupo [finito] pode ser fielmente representado por transformações parciais ou totais sobre um conjunto [finito] apropriado. Assim, dado um semigrupo finito S, podemos considerar naturalmente o problema de determinar o menor inteiro não negativo n tal que S pode ser mergulhado no monóide $\mathcal{PT}_n$ de todas as transformações parciais de um conjunto com n elementos. Esta questão deriva de um problema colocado por B. Schein em 1972 [12] e foi resolvida por D. Easdown em 1987 [2] para semigrupos finitos inversos fundamentais. Neste trabalho apresentamos o estudo do problema análogo ao descrito atrás considerando representações que separam os idempotentes em vez de representações fiéis. Para um *block-group* (finito) S, exibimos uma descrição do menor inteiro não negativo n tal que existe um homomorfismo que separa idempotentes de S em $\mathcal{PT}_n$. Uma vez que, para um semigrupo fundamental S, este número coincide com o menor inteiro não negativo n tal que S pode ser mergulhado no monóide $\mathcal{PT}_n$, o nosso resultado generaliza o de Easdown mencionado. Embora independente, o nosso método tem, sem dúvida, fortes conexões com as ideias originais de Easdown. Assim, em primeiro lugar construímos uma extensão para *block-groups* da representação de Munn e, de seguida, obtemos um refinamento desta que provamos ser minimal. Ainda, como aplicação da nossa extensão da representação de Munn, mostramos as igualdades $\mathsf{BG} = \mathsf{EI} ⓜ \mathsf{Ecom} = \mathsf{N} ⓜ \mathsf{Ecom}$, em que BG, EI, N e Ecom denotam respectivamente as pseudovariedades dos block-groups finitos, dos semigrupos finitos com um só idempotente, dos semigrupos nilpotentes e dos semigrupos cujos idempotentes comutam.

Palavras-chave: semigrupos inversos, block-groups, representações, pseudovariedades.

Introdução

Seja X um conjunto qualquer. Denotamos por $\mathcal{PT}(X)$ o conjunto de todas as *transformações (parciais)* sobre X, i.e. o conjunto de todas as aplicações com domínio e contradomínio contidos em X. O conjunto $\mathcal{PT}(X)$ munido da operação de *composição de relações* constitui um semigrupo. Por $\mathcal{T}(X)$ denotamos o conjunto de todas as transformações sobre X de domínio X (*transformações totais sobre* X), i.e. o conjunto de todas as aplicações de X em X. Então $\mathcal{T}(X)$ é um subsemigrupo de $\mathcal{PT}(X)$. Observemos que esta operação em $\mathcal{T}(X)$ não passa da composição usual de aplicações. Além disso, é claro que a aplicação identidade sobre X é uma identidade de $\mathcal{PT}(X)$ e pertence a $\mathcal{T}(X)$, pelo que $\mathcal{PT}(X)$ é um monóide e $\mathcal{T}(X)$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$. Outro submonóide importante de $\mathcal{PT}(X)$, e que nos interessa em especial, é o *semigrupo inverso simétrico* $\mathcal{I}(X)$, i.e. o conjunto de todas as transformações parciais *injectivas* sobre X. É claro que a aplicação identidade é uma transformação injectiva e que a composição de duas transformações parciais injectivas é uma transformação injectiva, donde $\mathcal{I}(X)$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$. Além disso, o conjunto das permutações sobre X está contido em $\mathcal{I}(X)$ e forma um subgrupo de $\mathcal{I}(X)$ (e de $\mathcal{PT}(X)$): o *grupo simétrico sobre* X. Se X for um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), digamos $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, representamos $\mathcal{PT}(X)$ por $\mathcal{PT}_n$, $\mathcal{T}(X)$ por $\mathcal{T}_n$ e $\mathcal{I}(X)$ por $\mathcal{I}_n$.

Seja S um semigrupo. Denotamos por S^1 o monóide obtido a partir de S juntando-lhe uma identidade, se S não for um monóide, ou o próprio S, caso contrário. É bem conhecido que a aplicação

$$\begin{array}{rccccccc} \phi: & S & \longrightarrow & \mathcal{T}(S^1) & & & \\ & s & \mapsto & \rho_s: & S^1 & \to & S^1 \\ & & & & x & \mapsto & xs \end{array}$$

é um homomorfismo injectivo de semigrupos (de monóides, se S for um monóide), pelo que todo o semigrupo [finito] pode ser representado fielmente por meio de de um semigrupo de transformações totais (ou parciais) sobre um certo conjunto [finito]. Também é bem conhecido que todo o semigrupo inverso S admite uma representação fiel em $\mathcal{I}(S)$ (Teorema de Vagner-Preston). Outra representação clássica de um semigrupo inverso é a *representação de Munn*: dado um semigrupo inverso S e denotando por E o semireticulado dos idempotentes de S, a aplicação

$$\begin{array}{rccccccc} \delta: & S & \to & \mathcal{I}(E) & & & \\ & s & \mapsto & \delta_s: & Ess^{-1} & \to & Es^{-1}s \\ & & & & e & \mapsto & s^{-1}es \end{array}$$

é um homomorfismo. Observemos que, em geral, a representação de Munn de um semigrupo inverso não é um homomorfismo injectivo. De facto, o núcleo de δ é a maior congruência que separa idempotentes de S, pelo que δ é um homomorfismo injectivo se e só se S é um semigrupo fundamental (ver [8] ou [9], para mais detalhes).

Neste trabalho estendemos a representação de Munn para semigrupos cujos elementos possuem no máximo um inverso. Os semigrupos finitos com esta propriedade formam a bem conhecida classe BG de semigrupos designados por *block-groups*. Esta classe de semigrupos finitos forma uma *pseudovariedade de semigrupos* (i.e. uma família de semigrupos finitos fechada para imagens homomorfas, subsemigrupos e produtos directos finitos) e é um dos personagens principais da cadeia de igualdades

$$\Diamond\mathsf{G} = \mathsf{PG} = \mathsf{J} * \mathsf{G} = \mathsf{J} \textcircled{m} \mathsf{G} = \mathsf{BG} = \mathsf{EJ},$$

em que G, J, PG, $\Diamond\mathsf{G}$ e EJ denotam respectivamente a pseudovariedade de todos os grupos, a pseudovariedade de todos os semigrupos $\mathcal{J}$-triviais, a pseudovariedade gerada por todos os monóides de partes de grupos, a pseudovariedade gerada por todos os produtos de Schützenberger de grupos e a pseudovariedade de todos os semigrupos cujos idempotentes geram um semigrupo $\mathcal{J}$-trivial. Para mais detalhes e a história completa destas igualdades, veja-se [11].

A extensão da representação de Munn para semigrupos que possuem no máximo um inverso é apresentada na Secção 1. Na Secção 2 exibimos duas decomposições em produtos de Mal'cev da pseudovariedade BG e concluímos que a classe dos block-groups é a maior família de semigrupos finitos para os quais podemos estender a representação de Munn. Apresentamos na Secção 3 algumas propriedades sobre semireticulados finitos necessárias para as Secções 4 e 5. Na Secção 4 construímos um refinamento da extensão de Munn para block-groups finitos, o qual provamos ser minimal. Finalmente, na Secção 5 descrevemos o menor inteiro não negativo n para o qual existe um homomorfismo que separa idempotentes de um block-group finito S em $\mathcal{PT}_n$.

Assumimos que o leitor possui alguns conhecimentos da Teoria de Semigrupos, nomeadamente sobre relações de Green, congruências, elementos regulares e semigrupos inversos. Estes assuntos são tratados, por exemplo, nos livros de J. Howie [8] e de M. Petrich [9]. Sobre pseudovariedades, pseudoidentidades e outros assuntos sobre semigrupos finitos a nossa referência é o livro de J. Almeida [1].

Este trabalho é essencialmente um resumo alargado do trabalho [5] no qual podem ser encontradas as provas completas dos resultados aqui referidos.

1 Uma extensão da representação de Munn

Nesta secção apresentamos uma extensão da representação de Munn para semigrupos cujos elementos possuem no máximo um inverso. Uma vez que um semigrupo finito com esta propriedade é designado por block-group, designamos também por *block-group* qualquer semigrupo infinito cujos elementos possuam no máximo um inverso. Observemos que, é fácil verificar que S é um block-group se e só se qualquer $\mathcal{R}$-classe e qualquer $\mathcal{L}$-classe possui no máximo um idempotente. Claramente, os semigrupos cujos idempotentes comutam e, em particular, os semigrupos inversos são block-groups.

Seja S um semigrupo. Denotamos por $E(S)$ o conjunto dos idempotentes de S e por $\mathrm{Reg}(S)$ o conjunto dos elementos regulares de S. Associadas às relações de Green $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ consideramos as relações de quasi-ordem parcial $\leq_{\mathcal{R}}$ e $\leq_{\mathcal{L}}$ definidas, respectivamente, por: para quaisquer $s, t \in S$,

$$s \leq_{\mathcal{R}} t \text{ se e só se } sS^1 \subseteq tS^1$$

e

$$s \leq_{\mathcal{L}} t \text{ se e só se } S^1 s \subseteq S^1 t.$$

Associamos a cada elemento $s \in S$ os seguintes subconjuntos de $E(S)$:

$$\mathcal{R}(s) = \{e \in E(S) \mid e \leq_{\mathcal{R}} s\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(s) = \{e \in E(S) \mid e \leq_{\mathcal{L}} s\}.$$

É fácil verificar que:

(i) Se $e \in \mathcal{R}(s)$ então $es \in \mathrm{Reg}(S)$;

(ii) Se $e \in \mathcal{L}(s)$ então $se \in \mathrm{Reg}(S)$.

Dado um block-group S denotamos por s^{-1} o único inverso de um elemento regular $s \in S$.

Dados um block-group S e $s \in S$, não é difícil provar que:

(i) Se $e \in \mathcal{R}(s)$ então $e = (es)(es)^{-1} = s(es)^{-1} = s(es)^{-1}e$, $(es)^{-1}(es) \in \mathcal{L}(s)$ e $(es)^{-1}(es) \,\mathcal{D}\, e$;

(ii) Se $e \in \mathcal{L}(s)$ então $e = (se)^{-1}(se) = (se)^{-1}s = e(se)^{-1}s$, $(se)(se)^{-1} \in \mathcal{R}(s)$ e $(se)(se)^{-1} \,\mathcal{D}\, e$.

Assim, neste caso, podemos considerar as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \delta_s: & \mathcal{R}(s) & \to & \mathcal{L}(s) \\ & e & \mapsto & (es)^{-1}(es) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \bar{\delta}_s: & \mathcal{L}(s) & \to & \mathcal{R}(s) \\ & e & \mapsto & (se)(se)^{-1} \end{array},$$

as quais preservam $\mathcal{D}$-classes. Por outro lado, visto que

$$\begin{aligned} e\delta_s\bar{\delta}_s &= ((es)^{-1}es)\bar{\delta}_s = s(es)^{-1}es(s(es)^{-1}es)^{-1} = (s(es)^{-1}e)s((s(es)^{-1}e)s)^{-1} \\ &= es(es)^{-1} = e, \end{aligned}$$

para qualquer $e \in \mathcal{R}(s)$, e analogamente $f\bar{\delta}_s\delta_s = f$, para qualquer $f \in \mathcal{L}(s)$, então as aplicações δ_s e $\bar{\delta}_s$ são bijecções inversas uma da outra.

Podemos agora estabelecer a nossa representação para block-groups:

Teorema 1.1. *Sejam S um block-group e $E = E(S)$. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \delta: & S & \to & \mathcal{I}(E) \\ & s & \mapsto & \delta_s \end{array}$$

é um homomorfismo que separa idempotentes.

Demonstração. Em primeiro lugar mostramos que δ é um homomorfismo. Sejam $s, t \in S$. Comecemos por ver que $\mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t) = \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t)$. Então $e \in \mathcal{R}(s)$ e $(es)^{-1}(es) = e\delta_s \in \mathcal{R}(t)$, pelo que $e = s(es)^{-1}$ e $(es)^{-1}(es) = tx$, para algum $x \in S^1$. Logo, $e = s(es)^{-1} = s(es)^{-1}(es)(es)^{-1} = stx(es)^{-1}$ e portanto $e \in \mathcal{R}(st)$, ou seja $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Reciprocamente, tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Como $e \in \mathcal{R}(st)$, temos $e = st(est)^{-1}$, donde $e \in \mathcal{R}(s)$, ou seja $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s)$. Em particular, $es \in \mathrm{Reg}(S)$. Por outro lado, $e = est(est)^{-1} = est(est)^{-1}e$, donde $es = (es)t(est)^{-1}(es)$. Além disso, $t(est)^{-1}(es)t(est)^{-1} = t(est)^{-1}$, pelo que $(es)^{-1} = t(est)^{-1}$. Logo, $e\delta_s = (es)^{-1}es = t(est)^{-1}es \in \mathcal{R}(t)$ e portanto $e\delta_s \in \mathrm{Dom}(\delta_t)$. Logo $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t)$ e, por conseguinte, $\mathrm{Dom}(\delta_{st}) = \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t)$. Seguidamente, tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Então, $e \in \mathcal{R}(s)$, pelo que es é regular. Além disso, $e\delta_s = (es)^{-1}es \in \mathcal{R}(t)$, donde $(es)^{-1}est$ é também regular. Como $est = es(es)^{-1}est$, então $est \;\mathcal{L}\; (es)^{-1}est$. Por outro lado, $e \in \mathcal{R}(st)$, pelo que est é regular. Então, $(est)^{-1}est \;\mathcal{L}\; est \;\mathcal{L}\; (es)^{-1}est \;\mathcal{L}\; ((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est$, donde $(est)^{-1}est = ((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est$, e portanto

$$e\delta_s\delta_t = ((es)^{-1}(es))\delta_t = ((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est = (est)^{-1}est = e\delta_{st},$$

donde δ é um homomorfismo.

Para mostrar que δ separa idempotentes, tomemos $e, f \in E$ tais que $\delta_e = \delta_f$. Então, em particular, $\mathcal{R}(e) = \mathcal{R}(f)$, pelo que $e \;\mathcal{R}\; f$ e portanto $e = f$. □

Um semigrupo S diz-se *fundamental* se a identidade for a única congruência que separa idempotentes em S. Este conceito [4] é uma extensão para semigrupos arbitrários da noção de semigrupo regular fundamental. Uma definição alternativa é apresentada por Grillet em [6]. De acordo com este autor, um semigrupo diz-se fundamental se a maior congruência contida em $\mathcal{H}$ for a identidade. Esta última definição é, claramente, mais abrangente, visto que qualquer congruência contida em $\mathcal{H}$ separa idempotentes. Além disso, é bem conhecido que estas duas noções coincidem para semigrupos regulares. No entanto, tal não é verdade em geral, mesmo para semigrupos finitos. Por exemplo, se S for um *semigrupo nulo* (i.e. um semigrupo com zero 0 tal que $S^2 = \{0\}$) então S é $\mathcal{H}$-trivial e todas as congruências de S separam idempotentes (note-se que S possui um só idempotente: o zero), pelo que, se S possui pelo menos dois elementos, então a maior congruência de S contida em $\mathcal{H}$ é a identidade e, por outro lado, S possui pelo menos duas congruências distintas que separam idempotentes (a identidade e a universal).

O seguinte corolário é uma consequência imediata do Teorema 1.1:

Corolário 1.2. *Qualquer block-group fundamental é isomorfo a um subsemigrupo de um semigrupo inverso.* □

É claro que, para um semigrupo inverso S, o homomorfismo δ definido no teorema anterior coincide com a representação de Munn de S original. Assim, mais geralmente para um block-group S, designamos também este homomorfismo por *representação de Munn* de S. Do mesmo modo que a representação de Munn de um semigrupo inverso, o nosso próximo resultado estabelece que, para um block-group eventualmente regular (um semigrupo diz-se *eventualmente regular* se todo o elemento possui uma potência regular), o núcleo de δ coincide com a maior congruência que separa idempotentes de S.

Consideremos a relação binária μ definida sobre um semigrupo arbitrário S por: dados $a, b \in S$, $a \,\mu\, b$ se e só se, para cada elemento regular $x \in S$, as seguintes condições se verificam: $x \,\mathcal{R}\, xa$ implica $xa \,\mathcal{H}\, xb$; $x \,\mathcal{R}\, xb$ implica $xa \,\mathcal{H}\, xb$; $x \,\mathcal{L}\, ax$ implica $ax \,\mathcal{H}\, bx$; e $x \,\mathcal{L}\, bx$ implica $ax \,\mathcal{H}\, bx$. Em [3], Edwards provou que μ é, em geral, uma congruência que separa idempotentes de S e, além disso, se S for um semigrupo eventualmente regular, então μ é a maior congruência que separa idempotentes de S. Por outro lado, podemos provar que núcleo da representação de Munn de um block-group contém μ. Assim, temos:

Corolário 1.3. *O núcleo da representação de Munn de um block-group eventualmente regular S é a maior congruência de S que separa idempotentes.* □

2 Produtos de Mal'cev e a pseudovariedade BG

Nesta secção, apresentamos duas decomposições da pseudovariedade BG em produtos de Mal'cev.

De agora em diante todos os semigrupos considerados neste trabalho são finitos.

Dada uma pseudovariedade de semigrupos V, um semigrupo S diz-se uma V-*extensão* de um semigrupo T se existe um homomorfismo sobrejectivo $\varphi : S \longrightarrow T$ tal que, para cada idempotente e de T, o subsemigrupo $e\varphi^{-1}$ de S pertence a V. Seja W outra pseudovariedade de semigrupos. O *produto de Mal'cev* $\mathsf{V} ⓜ \mathsf{W}$ é a pseudovariedade de semigrupos gerada por todas as V-extensões de elementos de W. Alternativamente, o produto de Mal'cev de pseudovariedades pode ser definido usando “morfismos relacionais”. Recordemos que um *morfismo relacional* $\tau : S \multimap T$ de um semigrupo S para um semigrupo T é uma função τ de S em $\mathcal{P}(T)$ tal que:

1. Para qualquer $a \in S$, $a\tau \neq \emptyset$;
2. Para quaisquer $a, b \in S$, $a\tau b\tau \subseteq (ab)\tau$.

Observemos que, para cada idempotente e de T, o conjunto $e\tau^{-1}$ ou é vazio ou é um subsemigrupo de S. Então, um semigrupo S pertence a $\mathsf{V} ⓜ \mathsf{W}$ se e só se existe um morfismo relacional τ de S para um membro T de W tal que, para cada idempotente e de T, se $e\tau^{-1}$ é não vazio então $e\tau^{-1} \in \mathsf{V}$ (ver [10, 7]).

A pseudovariedade BG já foi definida. Denotemos por Ecom a pseudovariedade de todos os semigrupos cujos idempotentes comutam. Observemos que estas duas pseudovariedades podem ser definidas por uma só pseudoidentidade: claramente, temos $\mathsf{Ecom} = [\![x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega]\!]$ e, por outro lado, $\mathsf{BG} = [\![(x^\omega y^\omega)^\omega = (y^\omega x^\omega)^\omega]\!]$ [1] (ver também [11]). Consideremos também a pseudovariedade $\mathsf{EI} = [\![x^\omega = y^\omega]\!]$ de todos os semigrupos que possuem um só idempotente (alguns autores denotam esta pseudovariedade por IE) e a pseudovariedade $\mathsf{N} = [\![x^\omega = 0]\!]$ de todos os semigrupos nilpotentes. Observemos que $\mathsf{EI} = \mathsf{G} \vee \mathsf{N}$ (ver [1]).

Sejam $S \in \mathsf{BG}$ e $E = E(S)$. Uma vez que a representação de Munn $\delta : S \to \mathcal{I}(E)$ de S é um homomorfismo que separa idempotentes e $\mathcal{I}(E) \in \mathsf{Ecom}$, temos imediatamente $S \in \mathsf{EI} ⓜ \mathsf{Ecom}$. Portanto $\mathsf{BG} \subseteq \mathsf{EI} ⓜ \mathsf{Ecom}$. Seguidamente, recordando que $\mathsf{BG} = \mathsf{J} ⓜ \mathsf{G}$, podemos considerar um morfismo relacional ξ de S para algum grupo G tal que $1\xi^{-1} \in \mathsf{J}$. Definamos a função τ de S em $\mathcal{P}(\mathcal{I}(E) \times G)$ por $s\tau = \{(s\delta, g) \in \mathcal{I}(E) \times G \mid g \in s\xi\}$, para qualquer $s \in S$. É fácil ver que τ é um morfismo relacional e, dado um idempotente e de $\operatorname{Im}\delta$, $(e, 1)\tau^{-1} = e\delta^{-1} \cap 1\xi^{-1} \in \mathsf{EI} \cap \mathsf{J}$. Como $\mathcal{I}(E) \times G$ é um semigrupo cujos idempotentes comutam e $\mathsf{EI} \cap \mathsf{J} = \mathsf{N}$ (de facto, temos também $\mathsf{EI} \cap \mathsf{A} = \mathsf{N}$: recordemos que $\mathsf{J} = [\![(xy)^\omega = (yx)^\omega, x^{\omega+1} = x^\omega]\!]$ e $\mathsf{A} = [\![x^{\omega+1} = x^\omega]\!]$ [1]), deduzimos que $S \in \mathsf{N} ⓜ \mathsf{Ecom}$, donde temos também $\mathsf{BG} \subseteq \mathsf{N} ⓜ \mathsf{Ecom}$.

Por outro lado, seja S uma EI-extensão de um semigrupo cujos idempotentes comutam T e seja $\varphi : S \longrightarrow T$ um homomorfismo sobrejectivo tal que, para cada idempotente e de T, $e\varphi^{-1} \in \mathsf{EI}$. Tomemos $x, y \in S$. Então $x^\omega\varphi, y^\omega\varphi \in E(T)$, pelo que

$$e = (x^\omega y^\omega)\varphi = x^\omega\varphi y^\omega\varphi = y^\omega\varphi x^\omega\varphi = (y^\omega x^\omega)\varphi$$

é um idempotente de T. Logo $(x^\omega y^\omega)^\omega, (y^\omega x^\omega)^\omega \in e\varphi^{-1}$ e, como $e\varphi^{-1} \in \mathsf{El}$, temos $(x^\omega y^\omega)^\omega = (y^\omega x^\omega)^\omega$. Assim $S \in \mathsf{BG}$ e portanto $\mathsf{El} \textcircled{m} \mathsf{Ecom} \subseteq \mathsf{BG}$.

Como $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{El}$, então $\mathsf{N} \textcircled{m} \mathsf{Ecom} \subseteq \mathsf{El} \textcircled{m} \mathsf{Ecom}$ e portanto:

Teorema 2.1. $\mathsf{BG} = \mathsf{El} \textcircled{m} \mathsf{Ecom} = \mathsf{N} \textcircled{m} \mathsf{Ecom}$. □

A primeira igualdade estabelecida no resultado anterior permite-nos concluir que a classe dos block-groups é a maior família de semigrupos finitos para os quais podemos considerar uma representação do tipo da de Munn, i.e. um homomorfismo que separa idempotentes num semigrupo inverso simétrico.

3 Dois resultados sobre semireticulados finitos

Seja E um semireticulado finito. Denotemos por 0 o zero de E e, para $e, f \in E$, denotemos por $e \vee f$ o supremo de e e f, quando existe, com respeito à ordem parcial natural $\leq$ de E. Recordemos que $e \leq f$ se e só se $e = ef (= fe)$.

Seja $e \in E$. Dizemos que e é $\vee$-*irredutível* se $e \neq 0$ e, para quaisquer $e_1, e_2 \in E$, $e = e_1 \vee e_2$ implica $e = e_1$ ou $e = e_2$. Dado um subconjunto X de E, denotamos o conjunto dos elementos $\vee$-irredutíveis de E pertencentes a X por $\mathfrak{Irr}_E(X)$, ou simplesmente por $\mathfrak{Irr}(X)$, se não houver ambiguidade.

Exemplo 3.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E = E(\mathcal{I}_n)$. Uma vez que E é o conjunto de todas as identidades parciais de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e, para quaisquer $\alpha, \beta \in E$, $\alpha \leq \beta$ se e só se α é uma restrição de β, podemos verificar facilmente que $\mathfrak{Irr}(E) = \left\{ \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \ldots, \binom{n}{n} \right\}$ e portanto $|\mathfrak{Irr}(E)| = n$.

Podemos provar que:

Proposição 3.1. *Sejam $e, f \in E$ tais que $\mathfrak{Irr}(Ee) = \mathfrak{Irr}(Ef)$. Então $e = f$.*

Tendo em conta que um subsemireticulado próprio maximal E' de E tem exactamente $|E| - 1$ elementos, não é muito difícil mostrar que E', mesmo encarado de modo independente, não pode possuir mais elementos $\vee$-irredutíveis do que E. Logo, por indução podemos deduzir o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Se E' é um subsemireticulado de E então $|\mathfrak{Irr}_{E'}(E')| \leq |\mathfrak{Irr}_E(E)|$.*

4 Um refinamento da representação de Munn para block-groups finitos

Nesta secção construímos um homomorfismo que separa idempotentes de um block-group finito S num semigrupo inverso simétrico sobre um subconjunto próprio especial de $E(S)$. Começamos por mostrar que $E(S)$ forma um semi-reticulado e depois consideramos os seus elementos $\vee$-irredutíveis.

Em primeiro lugar, recordemos que

$$\mathsf{BG} = [\![(x^\omega y^\omega)^\omega = (y^\omega x^\omega)^\omega]\!] = [\![(x^\omega y^\omega)^\omega x^\omega = (x^\omega y^\omega)^\omega = y^\omega (x^\omega y^\omega)^\omega]\!]$$

(ver [11]) e que, dado um semigrupo (qualquer) S, a ordem parcial natural $\leq$ de $E(S)$ define-se por $e \leq f$ se e só se $e = ef = fe$, para quaisquer $e, f \in E(S)$.

Sejam $S \in \mathsf{BG}$ e $e, f \in E(S)$. Então, se $e = ef$ temos

$$e = ef = (ef)^\omega = f(ef)^\omega = fe$$

e, analogamente, se $e = fe$ então $e = ef$. Portanto,

$$e \leq f \iff e = fe \iff e = fe.$$

É então fácil mostrar que:

Proposição 4.1. *Seja $S \in \mathsf{BG}$. Então $(E(S), \leq)$ é um $\wedge$-semireticulado. Além disso, o ínfimo $e \wedge f$ de e e f é igual a $(ef)^\omega$, para quaisquer $e, f \in E(S)$.*

Seja $\delta : S \to \mathcal{I}(E)$, com $E = E(S)$, a representação de Munn de S. Então, dado $s \in S$, os conjuntos $\mathcal{R}(s)$ e $\mathcal{L}(s)$ são ideais de ordem de $(E(S), \leq)$ e as aplicações $\delta_s : \mathcal{R}(s) \to \mathcal{L}(s)$ e $\bar{\delta}_s : \mathcal{L}(s) \to \mathcal{R}(s)$ preservam a ordem $\leq$. Além disso, dados $e \in \mathcal{R}(s)$ e $a, b \in E(S)$ tais que $e = a \vee b$, temos necessariamente $a, b \in \mathcal{R}(s)$ e ainda $e\delta_s = a\delta_s \vee b\delta_s$. Analogamente, se $e \in \mathcal{L}(s)$ e $a, b \in E(S)$ são tais que $e = a \vee b$, então $a, b \in \mathcal{L}(s)$ e $e\bar{\delta}_s = a\bar{\delta}_s \vee b\bar{\delta}_s$. Assim, $\delta_s : \mathcal{R}(s) \to \mathcal{L}(s)$ e $\bar{\delta}_s : \mathcal{L}(s) \to \mathcal{R}(s)$ são bijecções inversas uma da outra que preservam elementos $\vee$-irredutíveis, donde podemos concluir que as correspondências

$$\begin{array}{rccc} \vartheta_s : & \mathfrak{Irr}(\mathcal{R}(s)) & \to & \mathfrak{Irr}(\mathcal{L}(s)) \\ & e & \mapsto & (es)^{-1}(es) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \bar{\vartheta}_s : & \mathfrak{Irr}(\mathcal{L}(s)) & \to & \mathfrak{Irr}(\mathcal{R}(s)) \\ & e & \mapsto & (se)(se)^{-1} \end{array}$$

são bijecções inversas uma da outra.

Seguidamente, observemos que, dados um conjunto X, um subconjunto Y de X, um semigrupo (qualquer) S e um homomorfismo $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{PT}(X)$ tal que $Y(s)\varphi \subseteq Y$, para qualquer $s \in S$, é fácil ver que a aplicação $\zeta : S \longrightarrow \mathcal{PT}(Y)$ definida por $(s)\zeta = (s)\varphi|_Y$ (considerada como aplicação em Y), para qualquer $s \in S$, é também um homomorfismo.

Por outro lado, tendo em conta a Proposição 3.1 e o Corolário 1.3, é agora fácil estabelecer o seguinte refinamento da nossa representação de Munn:

Teorema 4.2. *Seja S um block-group finito e seja $U = \mathfrak{Irr}(E(S))$. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \vartheta: & S & \to & \mathcal{I}(U) \\ & s & \mapsto & \vartheta_s \end{array}$$

é um homomorfismo que separa idempotentes. Além disso, o núcleo de ϑ é a maior congruência que separa idempotentes de S.

Tendo em conta o conjunto base do semigrupo inverso simétrico considerado no conjunto de chegada, provamos na próxima secção que o homomorfismo do teorema anterior é minimal.

5 O grau de separação dos idempotentes de um block-group

Seja S um semigrupo finito. Definimos o *grau de separação dos idempotentes*, $\mathfrak{d}(S)$, de S como sendo o menor inteiro não negativo n tal que existe um homomorfismo que separa idempotentes de S em $\mathcal{PT}_n$.

Observemos que, o problema de determinar $\mathfrak{d}(S)$ faz sentido para qualquer semigrupo finito S. No entanto, se substituíssemos $\mathcal{PT}_n$ por $\mathcal{I}_n$, só poderíamos considerar block-groups finitos, de acordo com a observação do fim da Secção 2. Claramente, o menor inteiro não negativo n tal que existe um homomorfismo que separa idempotentes de um semigrupo $S \in \mathsf{BG}$ em $\mathcal{I}_n$ não é menor que $\mathfrak{d}(S)$. Mostramos à frente que, de facto, estes dois números são iguais.

O seguinte lema é fácil de provar:

Lema 5.1. *Sejam S e T dois block-groups finitos e seja $\varphi : S \to T$ um homomorfismo sobrejectivo. Então $\phi = \varphi|_{E(S)} : (E(S), \wedge) \to (E(T), \wedge)$ é um homomorfismo sobrejectivo (de semireticulados). Além disso, se φ separa idempotentes então ϕ é um isomorfismo.*

Observemos que, dado $\alpha \in \mathcal{PT}_n$, temos $\alpha = \alpha^2$ se e só se $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Fix}(\alpha)$.

Seja Y um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e denotemos a identidade parcial de domínio (e imagem) Y por 1_Y. É claro que $1_Y \in E(\mathcal{I}_n)$.

Seguidamente, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{ccc} E(\mathcal{PT}_n) & \to & E(\mathcal{I}_n) \\ \alpha & \mapsto & \overline{\alpha}\,, \end{array}$$

com $\overline{\alpha} = 1_{\mathrm{Fix}(\alpha)} = \alpha|_{\mathrm{Im}(\alpha)}$, para qualquer $\alpha \in E(\mathcal{PT}_n)$. Então, dados dois idempotentes α e β de $\mathcal{PT}_n$, temos:

(i) Se $\alpha \le \beta$ então $\overline{\alpha} \le \overline{\beta}$;

(ii) $\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \leq \overline{(\alpha\beta)^\omega}$ (e $\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \leq \overline{(\beta\alpha)^\omega}$);

(iii) Se $\overline{(\alpha\beta)^\omega} \leq \overline{\alpha}, \overline{\beta}$ então $\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \overline{(\alpha\beta)^\omega}$.

A partir destas propriedades, podemos então facilmente provar que:

Lema 5.2. *Seja $T \in \mathsf{BG}$ um subsemigrupo de $\mathcal{PT}_n$. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{cccc} \xi : & (E(T), \wedge) & \to & (E(\mathcal{I}_n), \cdot) \\ & \alpha & \mapsto & \overline{\alpha} \end{array}$$

é um homomorfismo injectivo (de semireticulados).

Seja S um block-group finito. Uma vez que a aplicação $\vartheta : S \to \mathcal{I}(\mathfrak{Irr}(E(S)))$, definida no Teorema 4.2, é um homomorfismo que separa idempotentes, temos que $\mathfrak{d}(S) \leq |\mathfrak{Irr}(E(S))|$. Por outro lado, seja $\varphi : S \to \mathcal{PT}_{\mathfrak{d}(S)}$ um homomorfismo que separa idempotentes e seja $T = S\varphi \in \mathsf{BG}$. Então, pelo Lema 5.1, podemos considerar o isomorfismo $\phi = \varphi|_{E(S)} : (E(S), \wedge) \to (E(T), \wedge)$ e, pelo Lema 5.2, a aplicação

$$\begin{array}{cccc} \phi\xi : & (E(S), \wedge) & \to & (E(\mathcal{I}_{\mathfrak{d}(S)}), \cdot) \\ & e & \mapsto & \overline{e\varphi} \end{array}$$

é um homomorfismo injectivo de semireticulados. Logo, pelo Teorema 3.2, temos que $|\mathfrak{Irr}(E(S))| = |\mathfrak{Irr}_{E(S)}(E(S))| \leq |\mathfrak{Irr}_{E(\mathcal{I}_{\mathfrak{d}(S)})}(E(\mathcal{I}_{\mathfrak{d}(S)}))| = \mathfrak{d}(S)$, atendendo ao Exemplo 3.1.

Mostrámos assim que:

Teorema 5.3. *O grau de separação dos idempotentes de um block-group finito é igual ao seu número de idempotentes $\vee$-irredutíveis.* □

Agradecimentos

O autor agradece o apoio da FCT e do FEDER, no âmbito do projecto "Álgebra fundamental e aplicações"– POCTI/MAT/893/2003.

Referências

[1] Almeida, J., "Finite Semigroups and Universal Algebra", World Scientific, Singapore, 1995.

[2] Easdown, D., *The minimal faithful degree of a fundamental inverse semigroup,* Bull. Austral. Math. Soc. **35** (1987), 373–378.

[3] Edwards, P.M., *Eventually regular semigroups,* Bull. Austral. Math. Soc. **28** (1983), 23–38.

[4] Edwards, P.M., *Fundamental semigroups,* Proc. Royal Soc. Edinburgh **99A** (1985), 313–317.

[5] Fernandes, V.H., *The idempotent-separating degree of a block-group,* submetido.

[6] Grillet, P.A., "Semigroups, an Introduction to the Structure Theory", Marcel Dekker, Inc, 1995.

[7] Henckell, K., S. Margolis, J.-E. Pin e J. Rhodes, *Ash's type II theorem, profinite topology and Malcev products. Part I*, Int. J. Algebra Comput. **1** (1991), 411–436.

[8] Howie, J.M., "Fundamentals of Semigroup Theory", Oxford University Press, 1995.

[9] Petrich, M., "Inverse Semigroups", John Wiley & Sons, 1984.

[10] Pin, J.-E., "Varieties of Formal Languages", North Oxford Academic, 1986.

[11] Pin, J.-E., $\mathsf{BG} = \mathsf{PG}$*: a success story,* J. Fountain (ed.), Semigroups, Formal Languages and Groups, 33-47, Kluwer Academic Pub., 1995.

[12] Shevrin, L.N., *The Sverdlovsk Tetrad,* Semigroup Forum **4** (1972), 274–280.

Segundo endereço: Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa, Av. Prof. Gama Pinto 2, 1649-003 Lisboa, Portugal.